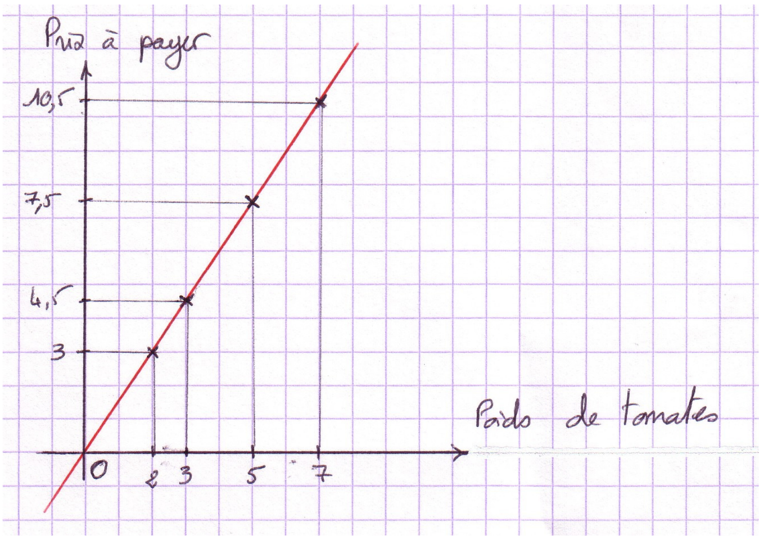
Chapitre 14 : Fonctions linéaires et affines.

I. Interprétation graphique de la proportionnalité.

Pté 1 :
Si on place sur un graphique les points qui correspondent à un tableau de proportionnalité, on obtient des points alignés sur une droite qui passe par l'origine.
Réciproquement, une droite qui passe par l'origine représente toujours une proportionnalité.



II. Fonctions linéaires.

Def 2 : Soit un nombre donné k.
La fonction linéaire de coefficient k est la fonction « qui multiplie par k ». $f : x \mapsto kx$.

On note aussi $f(x) = kx$ ou $y = kx.$

L'image y ou $f(x)$ est obtenue en multipliant par k l'antécédent noté x.

Exemple pour k = - 5 :

$f(x) = -5x$ ou $f : x \mapsto -5x$

$f(2) = -5 \times 2$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -5 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{5}{3}.$

L'antécédent de 10 est 2 car $f(2) = 10.$

Remarque fondamentale : une situation de proportionnalité se traduit par une fonction linéaire. Réciproquement, toute fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Pté 2 : La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

(Voir figure au paragraphe I).

III. Fonctions affines.

Def 3 : Soient a et b deux nombres donnés.
La fonction « qui multiplie par a, puis ajoute b au résultat » est une fonction affine.
$f : x \mapsto y = ax + b$.
Le nombre a s'appelle coefficient directeur et le nombre b ordonnée à l'origine.

On note aussi $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b.$

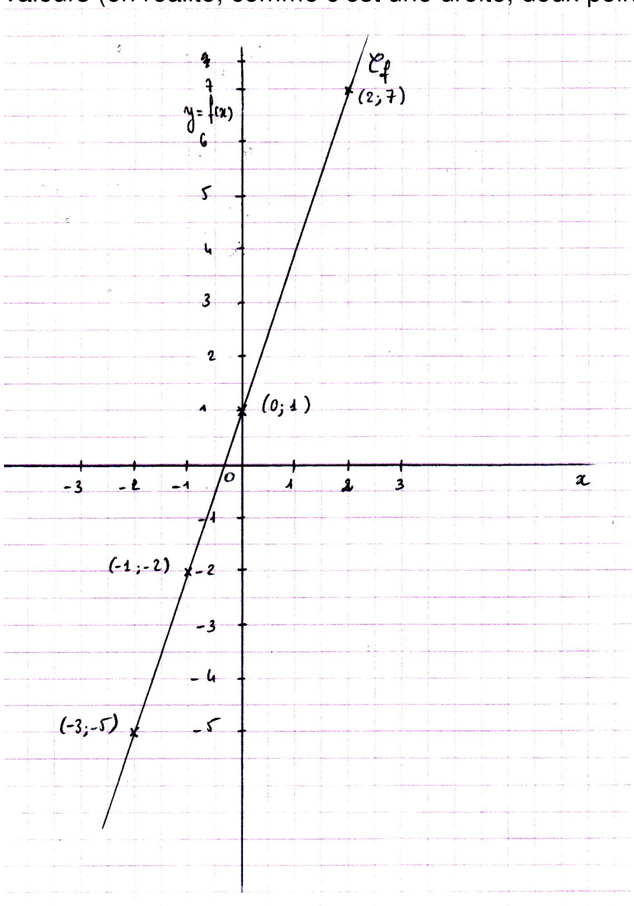
L'image y ou $f(x)$ est obtenue en multipliant par a l'antécédent noté x, puis en ajoutant b au résultat.

Exemple : Considérons f : x ↦ 3x+1.

On fait un tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	2
y=3x+1	-5	-2	1	7

On place dans un repère les points dont on a calculé les coordonnées (x ; y) grâce au tableau de valeurs (en réalité, comme c'est une droite, deux points suffiront).



L'interprétation du coefficient directeur « a » est la même que pour une fonction linéaire : il traduit l'inclinaison de la droite par rapport à l'horizontale.
Quant à « b », que l'on appelle « ordonnée à l'origine », il permet de savoir où la droite croise l'axe des ordonnées (c'est donc l'ordonnée du point de la droite situé au-dessus de l'origine).

Pour une fonction affine, l'équation de la droite est de la forme $D \mid y = ax+b$.
Dans cet exemple, on a donc : $D \mid y = 3x+1$.

Pté 3 : La représentation graphique d'une fonction affine est une droite, qui ne passe pas nécessairement par l'origine du repère.

Remarque 1 : **Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine, où b=0.**

Remarque 2 : Si on prend deux valeurs distinctes quelconques de x (on les notera x et x') et les valeurs correspondantes de y (on les notera y=f(x)=ax+b et y'=f(x')=ax'+b), on peut calculer le coefficient directeur a de la fonction affine comme ceci :

$$a = \frac{y'-y}{x'-x} = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$$

On dit qu'il y a proportionnalité entre les accroissements de f(x) et les accroissements de x (voir livre p.148).

Remarque 3 : Si a>0, on dit que la fonction f est croissante ; si a<0, on dit que la fonction f est décroissante ; si a=0, la fonction f est constante.

Remarque 4 : Ce chapitre est fondamental pour la classe de seconde.